**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020**

**Θέμα Α**

**Α1)** Σχ. βιβλίο σελ. 76

**Α2)** Σχ. βιβλίο σελ. 104

**Α3)** α) Ψευδής

β) Σχ. βιβλίο σελ. 136

**Α4)** α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

**Θέμα Β**

**Β1)** $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^x$

$D_{f\circ g}=\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}$

- $x\in D_g \to x\in\mathbb{R}$
- $g(x)\in D_f \to e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

Άρα $D_{f\circ g}=(0,+\infty)$.

$f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$.

**Β2)**

$$f(g(x_1))=f(g(x_2)) \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1} \Leftrightarrow (e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1)=(e^{x_2}+2)(e^{x_1}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1+x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1+x_2}-e^{x_2}+2e^{x_1}-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η $(f\circ g)(x)$ είναι 1-1 συνεπώς είναι αντιστρέψιμη.

$$y=\frac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow y(e^x-1)=e^x+2 \Leftrightarrow e^x(y-1)=y+2 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x=\frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\frac{y+2}{y-1}>0 \Leftrightarrow y<-2 \text{ ή } y>1}{\Leftrightarrow} x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$$

Αφού $x>0$ τότε θα πρέπει $\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)>0 \Leftrightarrow y>1$.

Συνεπώς $(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x>1$.

**Β3)** $\varphi'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{x+2}{x-1}}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)'=\dfrac{\dfrac{x-1-x-2}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+2}{x-1}}=\dfrac{-3}{(x+2)(x-1)}<0$ για κάθε $x>1$.

Συνεπώς είναι γνησίως φθίνουσα.

**Β4)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

Θέτω $\frac{x+2}{x-1}=k$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=\lim\limits_{k\to+\infty}\ln k=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

Θέτω $\frac{x+2}{x-1}=k$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=1$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=\lim\limits_{k\to 1}\ln k=0$



**Θέμα Γ**

**Γ1)** Η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$. Άρα είναι συνεχής στο 0.

Θα πρέπει: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda\\
&\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=\lambda\\
&f(0)=1
\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \lambda=1-\ln\lambda$$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(\lambda)=\lambda-1+\ln\lambda$ με $\lambda>0$, η οποία έχει προφανή ρίζα $\lambda=1$.

Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=1+\dfrac{1}{\lambda}>0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε είναι και 1-1. Συνεπώς η ρίζα είναι μοναδική.

**Γ2)** Για $\lambda=1$ έχουμε ότι:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x\le 0\\ \etaμx+συνx, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Για να ορίζεται η εφαπτομένη αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{1-x}}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\etaμx+συνx-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\etaμx}{x}+\frac{συνx-1}{x}\right)=1$$

Άρα $f'(0)=1\Leftrightarrow εφω=1\Leftrightarrow ω=\dfrac{\pi}{4}$.

**Γ3)** Για $x<0$: $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$. Άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο διάστημα $(-\infty,0)$.

Για $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$: $f'(x)=συνx-\etaμx$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow συνx=\etaμx\Leftrightarrow συνx=συν\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=2κ\pi+\dfrac{\pi}{2}-x\\ x=2κ\pi-\dfrac{\pi}{2}+x\ (\text{αδύνατη})\end{cases}$$

$$x=2κ\pi+\frac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow 2x=2κ\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=κ\pi+\frac{\pi}{4}$$

Αφού $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ τότε:

$$0<κ\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<κ\pi<\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<κ<\frac{5}{4}\Leftrightarrow κ=0\ ή\ κ=1 \text{ διότι } κ\in\mathbb{Z}.$$

Άρα $x=\dfrac{\pi}{4}$ ή $x=\dfrac{5\pi}{4}$ τα οποία είναι τα κρίσιμα σημεία της f.

**Γ4)** Για $\alpha \le 0$ η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)$$

Για $y = 0$ έχουμε ότι $-\dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha) \Leftrightarrow x-\alpha = -(1-\alpha) \Leftrightarrow x = 2\alpha - 1$

Άρα το σημείο Β έχει συντεταγμένες $B(2\alpha-1, 0)$.

$$x(t) = 2\alpha(t) - 1 \Rightarrow x'(t) = 2\alpha'(t) = 2\left(-\frac{\alpha(t)}{3}\right) = -\frac{2\alpha(t)}{3}$$

Για $t = t_0$ έχουμε ότι:

$$x'(t_0) = -\frac{2\alpha(t_0)}{3} \overset{\alpha(t_0)=-1}{=} \frac{2}{3}.$$

**Θέμα Δ**

$$f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$$

**Δ1)** $f'(x) = e^x + 2x - e$

$f''(x) = e^x + 2 > 0,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συνεπώς η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα.

Αφού η $f'$ είναι συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f'(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f'(x), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x + 2x - e\right) = 0 + (-\infty) - e = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x + 2x - e\right) = +\infty + (+\infty) - e = +\infty$$

Επίσης $0 \in f'(\mathbb{R})$ και $f'$ είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Για $x < x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$

Για $x > x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$

Αφού αλλάζει η μονοτονία εκατέρωθεν του $x_0$, τότε το $x_0$ είναι η θέση του ολικού ελαχίστου της f. Δηλαδή $f(x) \geq f(x_0)$.

**Δ2)** Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$ διότι $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$.

Άρα έχουμε ότι:

$$-1 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \leq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq 1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1\right] = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Από Κ.Π.} \lim\limits_{x \to x_0}\left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right] = +\infty$$

**Δ3)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - x_0$.

- Η g είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών.
- $g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$ διότι $x_0 < 1$.

  $g(x_0) = f(x_0) + x_0 - x_0 = f(x_0) < 0$ διότι: $x_0 < 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(1) \Leftrightarrow f(x_0) < 0$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0 - \rho$.

Επίσης $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

**Δ4)**

$$f(x_0) > f(\rho)\left(f'(\kappa) + 1\right) \overset{\text{από Δ3}}{\Leftrightarrow} f(x_0) > (x_0 - \rho)\left(f'(\kappa) + 1\right) \overset{x_0 - \rho < 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho} - 1 < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - (x_0 - \rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa)$$

Εφαρμόζοντας Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στο διάστημα $[x_0, \rho]$, έχουμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0, \rho)$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$$

Αφού $\xi \in (x_0, \rho)$, τότε για κάθε $\kappa \in (\rho, 1)$ ισχύει ότι:

$$\xi < \kappa \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa).$$